***EMD-RQAtests*: new approach for decomposition of time series in stochastic and deterministic components**

**Indira Rodríguez Llanes**

Industrial Engineering Department,

Pontifical Catholic University of Rio de Janeiro, Brazil

**Fernando Luiz Cyrino Oliveira**

Industrial Engineering Department,

Pontifical Catholic University of Rio de Janeiro, Brazil

**Resumo**

A separação das componentes estocásticas e determinísticas presentes nas séries tem grande importância no processo de previsão, pois permite modelar individualmente cada componente e obter um modelo híbrido de maior acurácia. A abordagem proposta neste trabalho baseia-se na decomposição da série via *Empirical Mode Decomposition* (EMD). Posteriormente, a natureza de cada *Intrinsic Mode Fuction* (IMF), resultantes do processo de filtragem, são analisadas através de três testes de hipótese baseados no *Recurrence Quantification Analysis* (RQA). No final, da soma dos IMFs determinísticos mais o resíduo, obtém-se a componente determinística e da soma dos IMFs estocásticos se obtém a componente estocástica. A abordagem proposta foi avaliada no domínio de previsão usando séries reais. Os resultados obtidos através da modelagem híbrida foram melhores em comparação com os resultados da modelagem simples.

The separation of the time series in stochastic and deterministic components plays a key role in the forecasting process, since it allows individually model each component and obtain a hybrid model more accurate. This paper proposes an approach that combines the decomposition of the series via Empirical Mode Decomposition (EMD) with three hypothesis tests based on Recurrence Quantification Analysis (RQA). The results of the decomposition process are *n* Intrinsic Mode Functions (IMF) and the residue. For each IMF, the three hypothesis tests are applied to determine if it is deterministic or stochastic. Then, from the sum of all deterministic IMFs plus the residue, the deterministic component of the entire series is obtained. Likewise, from the sum of all stochastic IMFs plus the residue, the stochastic component of the entire series is obtained. The proposed approach was evaluated in the forecast domain using real series and the results obtained were better than those obtained from simple modeling.

Later, the nature of each Intrinsic Mode fuction (IMF), due to the filtering process, are analyzed by. At the end, the sum of over deterministic MFIs is obtained deterministic component and the stochastic sum of MFI obtains the stochastic component. The proposed approach was evaluated in the forecast domain using real series. The results obtained from the best hybrid modeling were compared with the results of the simple modeling.

**Keywords:** *Time series, decomposition, stochastic components, deterministic components, forecast.*

1. **Introdução**

A análise de uma série temporal baseada no conhecimento dos seus componentes e na interação entre eles, permite modelar o comportamento do sistema de forma eficaz (SHUMWAY; STOFFER, 2013) e isolar o conjunto de dados que são influenciados fortemente por processos aleatórios e que podem variar significativamente os resultados da modelagem. Segundo (ESPASA; CANCELO, 1996), a componente irregular ou estocástica são oscilações não sistemáticas que em geral afetam a série no momento em que acontecem.

Com o objetivo de separar fielmente as componentes estocásticas e determinísticas e obter previsões mais ajustadas, esse artigo propõe uma abordagem que usa EMD e três testes de hipótese baseado na RQA. Uma vez garantida a decomposição das series nas componentes estocásticas e determinísticas, se espera que a modelagem individual das mesmas gere um modelo híbrido de maior acurácia que modelos simples aplicados a série sem decompor, conforme proposto por (RIOS; DE MELLO, 2013).

A abordagem proposta foi avaliada em quatro series temporais reais, três delas disponíveis no R (R. CORE TEAM, 2014) e uma outra no site da Empresa de Pesquisa Energética do Brasil (EPE). Nesse sentido, cada serie foi modelada de duas formas: (1) através da função automática de previsão, *auto.arima*, implementada no R e (2) através da modelagem hibrida que inclui a modelagem individual das componentes estocásticas e determinísticas usando os modelos ARIMA e Polinomial respectivamente.

O artigo está organizado como segue: na seção 2 realiza-se uma revisão da literatura sobre abordagens de decomposição de series temporais, na seção 3 descrevem-se os métodos e técnicas usados no desenvolvimento da abordagem proposta. Na sequência, a seção 4 expõe-se detalhadamente a abordagem proposta. Na seção 5 são descritos e interpretados os experimentos realizados sobre um conjunto de séries reais e finalmente se extraem algumas conclusões e sugestões para futuras pesquisas no tema.

1. **Related words**

As abordagens de decomposição de séries temporais em componentes estocásticos e determinísticos tem sido de aplicação ampla no mundo real. Os autores (D´ALESSANDRO; YEGNANARAYANA; DARSINOS, 1995) apresentam um método de decomposição para estudar o sinal de voz no domínio do tempo. Outros trabalhos sugerem o uso da decomposição na biologia, por exemplo, para analisar a atividade do tremor no organismo humano (Lima, *et al*., 2006).

Na meteorologia, (HUANG *et al.*, 2001) utilizam uma abordagem de decomposição baseada nos métodos EMD e *Hilbert Spectrum Analysis* (HSA) para analisar os dados recopilados do terremoto de Taiwan o 21 de setembro de 1999. (WU; HUANG, 2004) propõem um método baseado nas características estatísticas do ruído branco e o aplicam aos dados associados ao *Southern Oscillation Index* (SOI), indicador da evolução e intensidade dos eventos “El Niño” ou “La Niña” no Oceano Pacífico. (LEE; QUARDA, 2012) propõem uma abordagem de detecção de mudança climática usando EMD. (LISZKA; HOLMSTRÖM, 1999) realizam um estudo de dados dos raios X do satélite ROSAT para extrair o componente determinístico.

Na área da Ciência da Computação: (TZAGKARAKIS; PAPADOPOULI; TSAKALIDES, 2007) e (TZAGKARAKIS; PAPADOPOULI; TSAKALIDES, 2009) usam métodos de decomposição para estudar a demanda do tráfego nas redes WLAN.

Outra área na qual tem também relevante importância a aplicação da decomposição é a área financeira. (MINERVA, 2010) propõe uma abordagem de decomposição que usa o filtro de Wavelet e cadenas de Markov e a aplicam a série de preço de fechamento de *Benetton Italian Stocks*.

As abordagens de decomposição de séries temporais em componentes estocásticos e determinísticos geralmente usam métodos de filtragem como primeiro passo. Desses métodos os mais utilizados na literatura são: *Singular Spectrum Analysis* (SSA), *Principal Components Analysis* (PCA), Transformada de Fourier (FT) e EMD. No entanto, esses métodos não são capazes de separar por si só as componentes estocásticas das componentes determinísticas, daí a necessidade de usar posteriormente técnicas de análise de sinais mais específicas que permitem detectar determinismo em séries de tempo. Essas técnicas são: RQA, *Delay Vector Variance Method* (DVV), *Mutual Information* (MI) e *Largest Lyapunov Exponent* (LLE).

1. **Techniques and tools**

Para atingir o objetivo proposto, foram utilizados os seguintes métodos e/ou técnicas: EMD e três testes de hipótese baseados na matriz de recorrência do *Recurrence Plot* (RP). A seguir são descritos cada um dos métodos e/ou técnicas que serão utilizados na proposta.

* 1. *Empirical* *Mode* *Decomposition*

EMD foi proposto por (HUANG, et al., 1998). É um método para a análise de sinais com diferentes frequências e modulações. É usado para representar os sinais não estacionários e/ou não lineares, que permitem a análise da composição de frequência das funções que tem uma única dimensão. (MALDONADO PORTILLO, 2012). O objetivo de EMD é decompor o sinal em uma soma de funções de modo intrínsecas chamadas IMFs.

A decomposição baseia-se nas seguintes premissas: (1) o sinal tem pelo menos dois extremos, um máximo e um mínimo, (2) a escala de tempo é definida pelo lapso de tempo entre esses extremos e (3) se os dados foram totalmente desprovidos de extremos, mas contém apenas os pontos de inflexão, então se pode diferenciar uma ou mais vezes para revelar os extremos. Os resultados finais podem ser obtidos por integração dos componentes. A seguir é apresentado um resumo do método que consiste em 6 passos:

1. Encontrar os máximos e mínimos locais de:
2. Interpolar entre os máximos e mínimos locais para encontrar os *envelopes* superiores e inferiores e , respectivamente.
3. Calcular a média dos *envelopes* .
4. Retirar o sinal de detalhe
5. Iterar os passos 1-4 do “resíduo” até que o sinal de detalhe seja considerado um *IMF* (satisfazer as duas condições):
6. Iterar os passos 1-5 no “resíduo” para todas as *IMFs*  do sinal.

No final, o resultado do processo de EMD é funções de modo intrínsecas IMFs e um sinal residual: como mostrado na equação 1. Cada IMF constitui uma série de tempo e seu comprimento é igual ao comprimento da série original.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

* 1. *Recurrence Plot* e *Recurrence Quantification Analysis*

*Recurrence Plot* (RP) foi introduzido por (Eckmann et al., 1987) e constitui uma ferramenta útil na análise de séries temporais não lineares e não estacionarias (CASDAGLI, 1992). Oferece uma imagem gráfica do tempo no qual um processo permanece correlacionado com ele mesmo. A representação oferecida pelo RP está composta por pontos no plano , os quais refletem as relações entre as observações e . Essas relações são organizadas em uma matriz binaria de duas dimensões, nomeada matriz de recorrência. No entanto, as estruturas criadas pelo RP não fornecem uma informação quantitativa da série (RIOS; DE MELLO, 2013), fato que motivou a criação do Recurrence Quantification Analysis (RQA) com o objetivo de simplificar e automatizar o processo de interpretação do RP.

RQA foi desenvolvido por (ZBILUT; WEBBER, 1992) e é um conjunto de métricas que refletem a composição do RP. These measures can be computed in windows along the main diagonal. This allows us to study their time dependence and can be used for the detection of transitions (Trulla et al., 1996). Another possibility is to de\_ne these measures for each diagonal parallel to the main diagonal separately (Marwan and Kurths, 2002). This approach enables the study of time delays, unstable periodic orbits (UPOs; Lathrop and Kostelich, 1989; Gilmore, 1998), and by applying to cross recurrence plots, the assessment of similarities between processes (Marwan and Kurths, 2002).

* 1. Testes de hipótese baseados em RQA

Os testes de hipótese utilizados foram desenvolvidos por (APARICIO; POZO; SAURA, 2008) e fundamentam-se no conceito de porcentagem de determinismo e na estrutura da matriz de recorrência do RP, nomeada *Recurrence Matrix* (RM). Devido à característica simétrica da RM, os indicadores introduzidos pela RQA são obtidos da estrutura geométrica da parte triangular superior ou inferior da RM, excluindo a diagonal principal, a qual é nomeada *Triangular Recurrence Matrix* (TRM). A análise, em termos de probabilidade, da distribuição dos segmentos que se formam dentro da TRM constitui o fundamento matemático que sustenta os testes de hipótese. O estudo dos segmentos baseia-se na variável aleatória L que aloca, a cada elemento da TRM, o comprimento do segmento ao qual esse elemento pertence. Assim, para cada comprimento de segmento que se forma na TRM é calculada sua probabilidade.

Assim os autores definiram a probabilidade de que um ponto recorrente da TRM pertença a um segmento de comprimento L como na equação 2:

(2)

Essa probabilidade constitui uma ferramenta muito importante na aplicação dos três testes de hipóteses, os quais têm como objetivo comparar a distribuição dos pontos recorrentes na TRM de uma série real contra a distribuição dos pontos recorrentes de uma série puramente aleatória. Concretamente, os três testes contêm as hipóteses definidas como:

**.**

Especificamente, esses testes são: (1) teste baseado no valor médio da variável aleatória L, que representa o número médio de pontos por segmento, (2) teste baseado na porcentagem de determinismo e (3) teste baseado no comprimento médio do segmento (ALL).

* + 1. Teste baseado em

A estatística, Número Médio de Pontos por Segmento, é definida pela equação 3:

(3)

Onde representa o número de pontos por segmento de comprimento L.

O critério de decisão se baseia no Valor Esperado de L, representado por , devido a que representa a média de L. Nesse sentido, se o valor de é significativamente maior que , a hipótese nula seria rejeitada, ou seja, a hipótese de um processo puramente aleatório seria rejeitada. Por tanto, pode-se dizer que a série e mais especificamente, o IMF, apresenta dependência geral e é classificado como determinístico.

Se o processo gerador dos dados for puramente aleatório, existirão NREC distribuídos arbitrariamente na TRM, cada um dos quais estará associado a uma realização diferente da variável aleatória L. Nessas condições os autores demostraram que e , de modo que para um número suficientemente alto de pontos recorrentes se cumpre que: ou .

* + 1. Teste baseado na porcentagem de determinismo (%DET)

A estatística porcentagem de determinismo (%DET) definida pela équa;ao 4 é comparada com o valor esperado do %DET, definido pela equação 3.5 como a proporção de pontos na TRM que formam segmentos de comprimento maior que 1. Isto responde ao fato de que quanto mais pontos “soltos” haja na TRM, mais aleatório é o IMF. Em outras palavras, quanto menos pontos “soltos” existam na TRM, mais determinístico é o IMF.

(4)

Onde é o número de pontos nos segmentos paralelos à diagonal principal considerando que o segmento é formado com um mínimo de, pelo menos, dois pontos adjacentes.

(5)

Com a finalidade de provar se %DET da série difere significativamente do seu valor esperado, , se usa o teste . Basicamente ele permite comprovar se a distribuição da qual é extraída uma amostra de dados é a mesma que a distribuição teórica especificada. As hipóteses do teste e a estatística são definidos como segue:

: O dado segue uma distribuição específica

: O dado não segue uma distribuição específica

(6)

O critério de decisão estabelece que se o processo de geração de dados for puramente aleatório, seguiria uma distribuição com um grau de liberdade. Nesse sentido, é necessário provar se os dados da amostra respeitam a distribuição de probabilidade teórica (hipótese nula). Somente será rejeitada a hipótese nula de um processo puramente estocástico se o valor da estatística %DET é significativamente maior que seu valor esperado, , por tanto podemos classificar a série como determinística. Pelo contrário, se %DET é menor que , embora o valor de seja alto, se aceita a hipótese nula e nesse caso a série é estocástica.

* + 1. Teste baseado em ALL

A estatística, Comprimento Médio de Segmento (ALL) é definida como a taxa entre o número de pontos recorrentes e o número total de segmentos na TRM. Por simplicidade, os autores propõem usar o inverso do comprimento médio do segmento, isto é , como mostrado na equação 7.

(7)

Dado que para processos puramente aleatórios se cumpre que e . Para um número suficientemente grande de pontos recorrentes se cumpre que: ou . Logo, o critério de decisão estabelece que se o valor da estatística é menor que o valor esperado, , existe evidência para rejeitar a hipótese nula. Nesse caso o IMF seria classificado como determinístico.

1. **Abordagem proposta**

A abordagem *EMD-RQAtestes* visa a separação das componentes estocásticas e determinísticas presentes em qualquer série de tempo, independentemente das suas características de linearidade e estacionariedade. Baseia-se nos níveis de determinismo dos IMFs.

A abordagem inicia-se com a decomposição da série usando EMD. Essa filtragem separa a série temporal em um conjunto finito de monocomponentes chamados IMFs, mais um resíduo . Cada IMF constitui uma série de tempo e seu comprimento é igual ao comprimento da série original .

O processo de filtragem da série tem a característica de retornar IMFs que são suavizados à medida que são extraídos da série, ou seja, o nível de estocasticidade tende a diminuir. Por consequência, os primeiros IMFs são “mais estocásticos” que os últimos IMFs, até que o resíduo não constitui um resíduo em si, senão uma componente de tendência e seja considerada, automaticamente, parte da componente determinística da série.

O próximo passo é aplicar os três testes de hipótese, anteriormente detalhados, a cada IMF. Assim, para maior certeza na classificação e para um melhor desenvolvimento da abordagem, cada IMF será classificado como determinístico quando os três testes rejeitarem a hipótese nula. Caso ocorrer o contrário (os três testes aceitarem a hipótese nula) ou alguma divergência entre os resultados dos testes; então os IMFs serão classificados como estocásticos.

No final, a soma dos IMFs determinísticos mais o resíduo formarão a componente determinística da série e a soma dos IMFs estocásticos constituirá a componente estocástica. Uma explicação gráfica da abordagem proposta é mostrada na figura 1.

A seguir, se mostra o algoritmo desenvolvido para implementar a abordagem proposta:

1. Decompor a série original em IMFs mais um resíduo usando EMD.
2. Aplicar a cada IMF os três testes de hipótese baseados em RQA. Neste trabalho são adotados os seguintes valores para as variaveis: *embedding dimension* (), tempo de retardo () e limiar de distância ().
3. Decisão: Se os três testes rejeitam a hipótese nula, o IMF analisado será classificado como determinístico; caso ocorrer o contrário (os três testes aceitarem a hipótese nula) ou alguma divergência entre os resultados dos testes, então o IMF será classificado como estocástico.
4. Somar os IMFs determinísticos mais o resíduo para obter a componente determinística.
5. Somar os IMFs estocásticos para obter a componente estocástica.

Na seção seguinte é avaliada a abordagem proposta no domínio de previsão usando séries reais. Uma vez feita a decomposição, as componentes estocásticas e determinísticas foram estudadas individualmente para entender suas influencias na série.

Figura 1: Abordagem proposta para decompor séries temporais em componentes estocásticas e determinísticas

1. **Resultados e discussões**

A abordagem proposta foi avaliada no domínio de previsão. Para isso foram usadas as séries temporais: (i) consumo de energia elétrica do Brasil, (ii) número de mortes de condutores de automóveis no Reino Unido, (iii) produção trimestral de ônibus no Reino Unido, e (iv) geração total de energia elétrica nos Estados Unidos. A série consumo de energia elétrica do Brasil está disponível no site da Empresa de Pesquisa Energética (EPE) e as restantes séries encontram-se nos pacotes *datasets* e *expsmooth* do software R (R. CORE TEAM, 2014). Na figura 2 são mostradas graficamente as séries.

No inicio, as séries analisadas foram divididas em duas amostras, uma de treinamento dada pelo 90 por cento (%) das observações e uma amostra de teste formada pelo 10 por cento restante. Nesse sentido, para cada série de treino é aplicada a abordagem de decomposição proposta seguida do processo de modelagem individual das componentes. A série de treino também foi modelada sem previa decomposição.

Os modelos considerados nos experimentos foram: Polinomial e *Autoregressive Integrated Moving Average* (ARIMA). Dado que o modelo Polinomial visa encontrar uma função de aproximação às observações da série, ele foi ajustado à componente determinística. Por outra parte, o modelo ARIMA define-se como uma combinação linear de valores passados e ruídos e foi usado, através da função *auto.arima* disponível no software R para modelar a componente estocástica e a série de treino sem decompor.



Figura 2: Séries temporais

No final, os resultados das previsões foram combinados para formar o modelo híbrido e sua acurácia foi avaliada e comparada com a acurácia do modelo aplicado à série sem decompor como mostrado na figura 3. Por outra parte, o resultado da previsão obtida pelo modelo híbrido foi comparado com a amostra de teste através das métricas MAPE, MAE e RMSE.

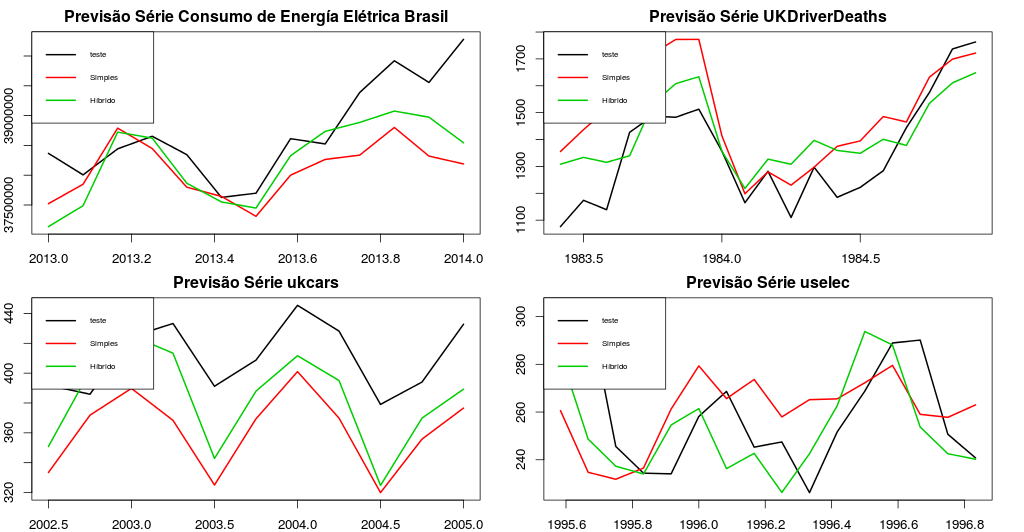


Figura 3: Previsões Simples e Híbrida das séries

A tabela 1 mostra as medidas de acurácia obtidas usando os modelos Simples e Híbrido nas respectivas séries de treino. A modelagem híbrida mostrou, em todos os cenários, melhores resultados preditivos que os obtidos na série sem decompor, o que implica que a decomposição das séries nas componentes estocásticas e determinísticas e posteriormente a modelagem individual de cada uma delas melhora significativamente os resultados. Tudo o anteriormente exposto implica que a abordagem proposta conseguiu separar corretamente as componentes estocásticas e determinísticas.

Tabela 1: Comparação dos modelos Simples e Híbrido através das métricas MAPE, MAE e RMSE

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Séries | Modelo Simples | | | Modelo Híbrido | | |
| MAPE | MAE | RMSE | MAPE | MAE | RMSE |
| Cons. Energia Elétrica do Brasil | 0.0173 | 682854.0 | 879230.2 | 0.0138 | 540570.8 | 712621.2 |
| UKDriverDeaths | 0.1124 | 143.4505 | 182.4450 | 0.0868 | 110.9902 | 125.5981 |
| ukcars | 0.0173 | 682854.0 | 879230.2 | 0.0138 | 540570.8 | 712621.2 |
| uselec | 0.0795 | 20.8948 | 26.8695 | 0.0585 | 15.7154 | 21.8250 |

1. **Conclusões**

O uso conjunto de EMD e testes de hipótese baseados em RQA, nomeado *EMD-RQAtestes* representa uma nova abordagem na decomposição de séries temporais em componentes estocásticas e determinísticas. A abordagem demostrou ser eficiente para separar as componentes estocásticas e determinísticas, permitindo posteriormente a modelagem individual das mesmas. Os resultados demostraram que a abordagem de decomposição EMD-RQAtestes constitui uma ferramenta muito importante para melhorar a modelagem de séries temporais em comparação aos métodos automáticos aplicados diretamente nas séries.

Como extensão deste trabalho, os autores sugerem utilizar a abordagem proposta em um conjunto maior de séries temporais reais, assim como desenvolver um algoritmo computacional que escolha automaticamente os valores ótimos das variáveis *embedding dimension* (), tempo de retardo () e limiar de distância ().

**Referencias bibliográficas**

APARICIO, T.; POZO, E. F.; SAURA, D. Detecting determinism using recurrence quantification analysis: Three test procedures. Journal of Economic Behavior & Organization, v. 65, p. 768-787, 2008.

BOX, G.; JENKINS, G. M.; REINSEL,. Time Series Analysis: Forecasting & Control. 3rd. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 1994.

CASDAGLI, M. Nonlinear prediction of chaotic time series. Physica D: Nonlinear Phenomena, v. 35, n. 3, p. 335-356, 1989.

D´ALESSANDRO, C.; YEGNANARAYANA, B.; DARSINOS, V. Decomposition of speech signals into deterministic and stochastic components. In Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP-95., 1995 International Conference, p. Vol 1, pp 76, 1995.

ESPASA, A.; CANCELO, J. R. Caracterización de los aspectos esenciales de un fenómeno económico mediante técnicas estadísticas de extracción de señales. Métodos cuantitativos para el análisis de la coyuntura económica, Madrid, n. Alianza Editorial, p. 255-324, 1996.

ECKMANN, J-P., S. OLIFFSON KAMPHORST, DAVID RUELLE. "Recurrence plots of dynamical systems." EPL (Europhysics Letters) 4.9, 1987: 973.

HUANG, E. et al. The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis. The Royal Society, United States, v. Vol. 454., n. No. 1971, p. 903-995, 1998.

HUANG, N. E. et al. A new spectral representation of earthquake data: Hilbert spectral analysis of station TCU129, Chi-Chi, Taiwan, 21 September 1999. Bulletin of the Seismological Society of America, 91, 5, p. 1310-1338, 2001.

LEE, T.; QUARDA, T. B. M. J. An EMD and PCA hybrid approach for separating noise from signal, and signal in climate change detection. International Journal of Climatology, v. 32, n. 4, p. 624-634, 2012.

LIMA , et al. Empirical Mode Decomposition: a novel technique for the study of tremor time series. Medical and biological engineering, p. 569-582, 2006.

LISZKA, L.; HOLMSTRÖM,. Extraction of a deterministic component from ROSAT X-ray data using a wavelet transform and the principal component analysis. Astronomy and Astrophysics Supplement Series, v. 140, n. 1, p. 125-134, 1999.

MALDONADO PORTILLO,. Instituto de Física UNAM. Instituto de Física UNAM, 22 junio 2012. Disponivel em: <http://www.fisica.unam.mx/noticias\_descseriestiempo2012.php>. Acesso em: 26 fevereiro 2015.

MINERVA, T. Wavelet filtering for prediction in time series analysis. Non-Linear Systems & Wavelet Analysis, p. 89-94, 2010. ISSN ISBN: 978-960-474-189-2.

R. CORE TEAM. R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Viena, Austria, 2014.

RIOS, R. A.; DE MELLO, R. F. Improving time series modeling by decomposing and analyzing stochastic and deterministic influences. Signal Processing, v. 93, n. 11, p. 3001-3013, 2013.

RIOS, R. A. et al. Estimating determinism rates to detect patterns in geospatial datasets. Remote Sensing of Environment, p. 11-20, 2015.

SHUMWAY, R. H.; STOFFER, D. S. Time series analysis and its applications. [S.l.]: Springer Science & Business Media., 2013.

TZAGKARAKIS, G.; PAPADOPOULI, M.; TSAKALIDES, P. Singular spectrum analysis of traffic workload in a large-scale wireless lan. Proceedings of the 10th ACM Symposium on Modeling, analysis, and simulation of wireless and mobile systems. [S.l.]: ACM. 2007. p. 99-108.

TZAGKARAKIS, G.; PAPADOPOULI, M.; TSAKALIDES, P. Trend forecasting based on Singular Spectrum Analysis of traffic workload in a large-scale wireless LAN. Performance Evaluation, v. 66(3), p. 173-190, 2009.

WU, B. Z.; HUANG, N. E. A study of the characteristics of white noise using the empirical mode decomposition method.. Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, v. 460, p. 1597-1611, 2004. ISSN 2046.

ZBILUT, J. P.; WEBBER, C. L. Embeddings and delays as derived from quantification of recurrence plots. Physics letters A, v. 171, n. 3, p. 199-203, 1992.